

Numerical Simulation of Soliton Collision by using 1D Boussinesq Model

Four Saputra BM^{#1}, Didit Adytia^{*2}

*School of Computing, Telkom University
Jl. Telekomunikasi 1, Bandung, 40257, Indonesia*

²adytia@telkomuniversity.ac.id

Abstract

Soliton or solitary wave is a physical phenomenon in which a wave propagates without changing of form in a dispersive media. It is a condition when effects of nonlinearity is balanced with effects of dispersion. Therefore solitary wave propagation is a standard test for testing nonlinearity and dispersiveness of a wave model and its numerical implementation. One interesting case of the soliton phenomenon is the soliton collision which is an interaction between two solitary waves facing each other and producing a high impact wave. The phenomenon can be used to study tsunami wave interactions. In this paper we study the phenomenon by using numerical approach. We use a nonlinear dispersive 1D Boussinesq model that is implemented numerically by using Finite Element implementation in a collocated grid. The accuracy of the implementation is test by simulating two test cases of solitary wave, i.e. the propagation of solitary wave againsts analytical soliton solution of Korteweg-de Vries (KdV) and the collision of two identical solitary waves. Results of simulations are also compared with results of the nonlinear nondispersive Shallow Water Equations (SWE).

Keywords: Soliton, Soliton collision, Finite Element Method, Boussinesq, Korteweg-de Vries.

Abstrak

Soliton atau gelombang soliter adalah suatu fenomena fisik dimana suatu gelombang berpropagasi tanpa berubah bentuk pada suatu media dispersif. Fenomena ini terjadi ketika efek nonlinieritas seimbang dengan efek dispersi. Oleh karena itu, propagasi gelombang soliton adalah kasus standar untuk menguji nonlinieritas dan dispersi dari sebuah model gelombang dan implementasi numeriknya. Salah satu kasus yang menarik dari gelombang soliton adalah tabrakan soliton atau *soliton collision*, dimana terjadi interaksi antara dua soliton yang saling berhadapan dan menghasilkan gelombang tinggi. Fenomena ini dapat digunakan untuk mempelajari interaksi gelombang tsunami. Pada artikel ini akan dipelajari fenomena ini dengan kajian numerik. Pada artikel ini akan digunakan model nonlinear dan dispersif Boussinesq 1 dimensi yang diimplementasikan secara numerik menggunakan metode *Finite Element* pada grid tipe *collocated*. Akurasi dari implementasi numerik ini diuji dengan menyimulasikan dua kasus, yaitu propagasi gelombang soliton yang dibandingkan dengan solusi analitik soliton dari persamaan Korteweg-de Vries (KdV) dan tabrakan dari dua soliton yang menghasilkan gelombang tinggi. Hasil simulasi juga dibandingkan dengan hasil simulasi model nonlinear non-dispersif *Shallow Water Equations* (SWE).

Kata Kunci: Soliton, Soliton collision, Finite Element Method, Boussinesq, Korteweg-de Vries.

I. PENDAHULUAN

Soliton atau gelombang soliter adalah suatu fenomena fisik dimana suatu gelombang berpropagasi tanpa mengalami perubahan bentuk pada suatu media dispersif. Soliton pertama kali ditemukan oleh John Scott Russell pada 1884 dari pengamatannya pada perairan dangkal. Fenomena soliton terjadi dikarenakan adanya keseimbangan antara efek dispersi dan nonlinieritas (Yuliawati dkk 2018). Selain pada gelombang air, fenomena soliton juga diamati pada bidang optik nonlinear (Kivshar dan Agrawal, 2003), dimana soliton ini memiliki keseimbangan antara efek nonlinier dengan dispersi yang disebut sebagai *soliton temporal* (Zaera dkk 2018). Selain itu, pada sistem plasma nonlinier, persamaan yang digunakan untuk menggambarkan soliton adalah menggunakan Persamaan Diferensial Parsial (PDEs), seperti yang dilakukan pertama kali oleh Washimi dan Taniuti yang menggunakan persamaan *Korteweg-de Vries* (KdV) untuk soliton ion akustik (El-Tantawy 2016).

Salah satu kasus nonlinear yang menarik pada gelombang soliton adalah fenomena tabrakan soliton atau *soliton collision*. Pada fenomena ini, terjadi interaksi nonlinear dari dua soliton baik soliton besar yang menyusul soliton kecil (*overtaking soliton*), maupun tabrakan soliton yang saling berhadapan (*head on collision*). Fenomena nonlinear ini dapat mengakibatkan amplifikasi gelombang yang besar. Ketika terjadi tabrakan dua soliton, misalnya soliton dengan amplitudo a_1 dan a_2 , maka tinggi gelombang maksimum ketiga ketika kedua gelombang ini bertemu (superposition) dapat ditulis sebagai $M = m(a_1 + a_2)$, dimana m adalah faktor amplifikasi. Teori pendekatan linear memberikan $m = 1$, namun untuk kasus nonlinear dengan sudut kedatangan tertentu, mungkin didapatkan $m = 2$ (Miles, 1977). Pada penelitian tentang tsunami, tabrakan soliton ini digunakan untuk mempelajari amplifikasi gelombang nonlinear pada desain tanggul laut (Yuliawati dkk 2015). Selain itu, kasus tabrakan soliton menjadi kasus yang menarik untuk menguji akurasi nonlinear dan sifat dispersi dari suatu model gelombang dan implementasinya (Escalante dkk 2018). Hal ini dikarenakan pada saat terjadi tabrakan soliton, skema numerik dari suatu model gelombang harus mampu untuk merepresentasikan interaksi nonlinear secara akurat.

Pada umumnya, studi terkait propagasi gelombang soliton secara numerik dilakukan dengan menggunakan model gelombang klasik *Korteweg-de Vries* (KdV) yang merupakan model gelombang satu arah (*unidirectional model*), yang valid untuk kasus nonlinear lemah (*weakly nonlinear*) dan dispersi lemah (*weakly dispersion*) (lihat Wang dkk 2018, Ermakov & Stepanyants 2019). Beberapa peneliti lainnya menganalisis interaksi soliton dengan model yang lebih kompleks yaitu model tipe *Kadomtsev & Petviashvili* atau KP model (Ablowitz & Baldwin 2012) dan tipe Boussinesq (Darvishi dkk 2017, Hassan 2009).

Selain dipelajari secara analitik maupun secara eksperimen fisik, interaksi soliton dapat dipelajari dengan pendekatan numerik. Model numerik yang digunakan ini dapat dikembangkan lebih lanjut untuk menyimulasikan kasus-kasus realistik, seperti tsunami ataupun propagasi soliton pada pantai. Pada artikel ini, tabrakan soliton akan dipelajari melalui numerik. Model gelombang yang digunakan adalah model gelombang nonlinear dan dispersif yang dinamakan model *Variational Boussinesq* (VB) yang diperkenalkan oleh (Adytia & Groesen 2012), (Lawrence dkk 2018), (Adytia dkk 2018). Pada artikel ini model VB akan diimplementasikan dengan metode *Finite Element* (FE) pada grid *collocated*. Akurasi dari implementasi numerik model ini akan diuji dengan melakukan dua kasus propagasi soliton. Kasus pertama yaitu propagasi soliton pada dasar rata yang akan dibandingkan dengan solusi soliton analitik, dan kasus kedua adalah tabrakan dua soliton (*head on collision*) yang identik.

Isi dari artikel ini adalah sebagai berikut. Pada Bab 2, akan dideskripsikan model *Variational Boussinesq* yang diikuti oleh implementasi numerik dengan menggunakan metode *Finite Element* pada Bab 3. Pada Bab 4 akan dilakukan uji skema numerik untuk menyimulasikan propagasi soliton dan kasus tabrakan soliton. Artikel ini ditutup dengan kesimpulan pada Bab 5.

II. MODEL GELOMBANG AIR

Pada artikel ini, akan digunakan model gelombang nonlinear dan dispersif tipe Boussinesq, yaitu yang diturunkan melalui metode variasi yang dinamai model *Variational Boussinesq* (VB) (Adytia & Groesen 2012, Lawrence dkk 2018). Model VB diturunkan berdasarkan prinsip minimisasi dari formulasi variasional untuk gelombang air (Miles 1981). Hal ini berdasarkan fakta bahwa dinamika dari gelombang air dapat direpresentasikan sebagai suatu sistem yang bersifat Hamiltonian (Zakharov 1967, Broer 1968). Untuk penyederhanaan masalah, problem pada artikel ini disederhanakan menjadi problem 1 dimensi (1D). Misalkan variabel x , z dan t menyatakan koordinat horizontal arah x , vertikal arah z dan waktu t . Sistem Hamiltonian untuk gelombang air dengan variable kanonikal elevasi gelombang $\eta(x, t)$ dan potensial permukaan $\phi(x, t)$ diberikan oleh dua persamaan berikut yaitu

$$\partial_t \eta = \delta_\phi \mathcal{H} \text{ dan } \partial_t \phi = -\delta_\eta \mathcal{H}$$

dimana notasi $\partial_t \eta$ dan $\partial_t \phi$ menyatakan turunan parsial dari η dan ϕ terhadap waktu t , $\delta_\phi \mathcal{H}$ dan $\delta_\eta \mathcal{H}$ menyatakan turunan variasi \mathcal{H} terhadap ϕ dan η . Berdasarkan prinsip minimisasi Luke (Luke 1977), persamaan potensial untuk gelombang air dapat diformulasi ulang menjadi sebuah problem minimisasi sebuah Lagrangian yang dinyatakan dalam variable kanonik η dan ϕ . Oleh karena itu variable potensial fluida $\Phi(x, z, t)$ harus dinyatakan dalam variabel dipermukaan fluida, yaitu η dan ϕ . Pada model VB, potensial fluida Φ dihampiri dengan formula sebagai berikut

$$\Phi(x, z, t) \approx \phi(x, t) + \sum_m^M F_m(z). \psi_m(x, t) = \phi + F \cdot \Psi \tag{1}$$

dimana F_m menyatakan suatu fungsi profil vertikal, ψ_m merupakan suatu fungsi tambahan horizontal, dan notasi (\cdot) menyatakan suatu perkalian fungsi vektor. Untuk model dengan sebuah profil vertial ($M = 1$), dengan menggunakan hampiran (1), bentuk Lagrangian Luke untuk gelombang air dapat reformulasikan menjadi persamaan model VB yaitu sebagai berikut (detail penurunan lengkap model VB dapat dilihat pada Lawrence dkk 2018, dan Adytia dkk 2019))

$$\partial_t \eta = -\partial_x \cdot ((h + \eta) \partial_x \phi) - \partial_x (\beta \cdot \partial_x \psi) \tag{2}$$

$$\partial_t \phi = -g\eta - \frac{1}{2} \partial_x \phi^2 \tag{3}$$

dan sebuah persamaan eliptik untuk menghitung variabel ψ .

$$-\partial_x (\alpha \partial_x \psi) + \gamma \psi = \partial_x (\beta \partial_x \phi) \tag{4}$$

dengan $h(x)$ menyatakan kedalaman dari fluida, koefisien α , β dan γ diberikan oleh formula

$$\alpha = \int_{-h}^\eta F^2 dz, \beta = \int_{-h}^\eta F dz, \gamma = \int_{-h}^\eta (\partial_z F)^2 dz \tag{5}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2) dan (3) adalah persamaan kontinuitas dan momentum. Jika suku terakhir pada persamaan kontinuitas (2) di ruas kanan diabaikan, maka didapatkan model *Shallow Water Equation* (SWE) yang ditulis dalam variabel potensial permukaan ϕ , yaitu sebagai berikut

$$\partial_t \eta = -\partial_x ((h + \eta) \partial_x \phi) \tag{6}$$

$$\partial_t \phi = -g\eta - \frac{1}{2} \partial_x \phi^2 \tag{7}$$

Pada bab selanjutnya, model VB untuk 1 profile vertikal (persamaan (2-4)) ini akan diimplementasikan dengan menggunakan metode *Finite Element* (FE) yaitu metode Galerkin.

III. IMPLEMENTASI METODE FINITE ELEMENT

Pada bab ini akan dideskripsikan implementasi dari model gelombang variational Boussinesq (VB) pada persamaan (2-4) dengan menggunakan metode *Finite Element* (FE), yaitu dengan metode Galerkin. Berangkat

dari sistem persamaan diferensial, pada metode Galerkin, pertama-tama yang dilakukan adalah membentuk formulasi lemah dari sistem persamaan diferensial (2-4). Kemudian menentukan dan mendefinisikan fungsi basis dan menyatakan semua variabel utama yang terlibat dalam persamaan tersebut kedalam kombinasi linear dari fungsi basis yang telah ditentukan. Hampiran dalam bentuk kombinasi linear tersebut kemudian disubstitusikan kedalam formulasi lemah. Dengan manipulasi aljabar, akan didapatkan suatu sistem persamaan matriks. Sistem matriks inilah yang akan dihitung untuk mendapatkan solusi pada setiap rentang waktu simulasi numerik.

Misalkan fungsi $p(x)$ adalah sembarang fungsi tes, Ω dan $\partial\Omega$ menyatakan domain komputasi dan batas domainnya, dan n menyatakan vektor satuan arah normal dari domain komputasi. Bentuk formulasi lemah (*weak formulation*) dari suatu persamaan diferensial didapatkan dengan mengalikan persamaan diferensial dengan suatu sembarang fungsi tes $p(x)$ dan mengintegrasikannya terhadap domain komputasi Ω . Bentuk formulasi lemah dari persamaan kontinuitas (2) adalah sebagai berikut

$$\int_{\Omega} \partial_t \eta \cdot p \, d\Omega = \int_{\Omega} \{ (h + \eta) \partial_x \phi \partial_x p + \beta \cdot \partial_x \psi \partial_x p \} d\Omega - \int_{\partial\Omega} [(h + \eta) \partial_x \phi + \beta \cdot \partial_x \psi] p \cdot n \, d\Omega \quad (8)$$

Perhatikan bahwa integral pada batas di bagian kedua ruas kanan (8) menyatakan kondisi batas. Dalam artikel ini, kondisi batas yang digunakan adalah kondisi batas dinding (*hardwall*), atau tidak ada aliran yang mengalir keluar domain atau $\partial_x \phi = 0$, sehingga integral ini bernilai nol. Bentuk formulasi lemah dari persamaan momentum (3) dan persamaan eliptik (4) adalah sebagai berikut

$$\int_{\Omega} \partial_t \phi \cdot p \, d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ -g\eta \cdot p - \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 \cdot p \right\} d\Omega \quad (9)$$

$$\int_{\Omega} \{ \alpha \partial_x \psi \partial_x p + \gamma \psi \cdot p \} d\Omega = - \int_{\Omega} \beta \cdot \partial_x \phi \partial_x p \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\beta \partial_x \phi + \alpha \partial_x \psi] p \cdot n \, d\Omega \quad (10)$$

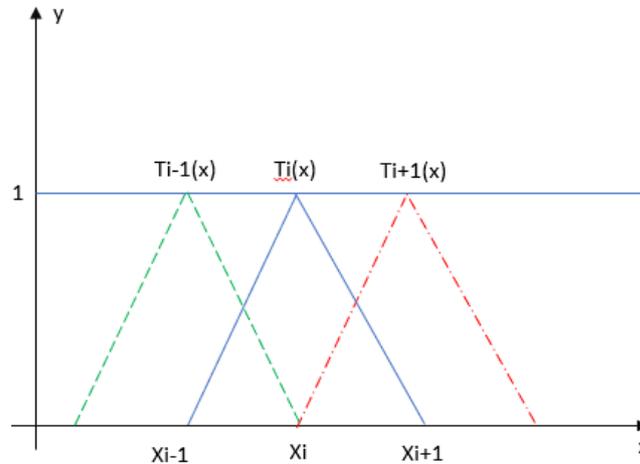
Perhatikan bahwa pada formulasi lemah (9) tidak muncul integral pada batas $\partial\Omega$, sedangkan pada bentuk formulasi lemah pada persamaan eliptik (10) muncul integral pada batas $\partial\Omega$ yaitu integral kedua pada ruas kanan (9). Seperti pada persamaan kontinuitas, dikarenakan digunakannya kondisi batas dinding, maka suku ini dapat diabaikan. Langkah selanjutnya adalah mendefinisikan fungsi basis untuk menghampiri variabel solusi pada bentuk formulasi lemah (8-10).

Misalkan domain simulasi $x \in [0, L]$ didiskritisasikan sebanyak N titik partisi dengan panjang partisi uniform Δx , dan x_i menotasikan posisi titik ke- i pada domain simulasi. Pada artikel ini, digunakan fungsi basis linear yang bersifat lokal yang didefinisikan sebagai berikut

$$T_i(x) = \max \left\{ 1 - \frac{|x - x_i|}{\Delta x}, 0 \right\} \quad (11)$$

Ilustrasi dari basis fungsi ini dapat dilihat pada Gambar 1. Selanjutnya variabel-variabel solusi pada persamaan (2-4), yaitu η , ϕ , dan ψ , dihampiri sebagai kombinasi linear dari basis fungsi $T_i(x)$ yaitu sebagai berikut

$$\eta(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \eta_i T_i(x) = \bar{\eta} \cdot T(x), \quad \phi(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \phi_i T_i(x) = \bar{\phi} \cdot T(x), \quad \psi(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \psi_i T_i(x) = \bar{\psi} \cdot T(x) \quad (12)$$



Gambar. 1. Ilustrasi fungsi basis linear 1 dimensi .

Selain itu, fungsi tes $p(x)$ juga dihampiri dengan menggunakan basis fungsi yang sama, yaitu $p(x) \approx \sum_{i=1}^N p_i T_i(x) = \bar{p} \cdot T(x)$. Hampiran dari solusi pada (12) dan fungsi tes $p(x)$ selanjutnya disubstitusikan ke bentuk formulasi lemah (8-10), sehingga didapatkan

$$\sum_i^N \sum_j^N \partial_t \eta_i \cdot p_j \int_{\Omega} T_i T_j d\Omega = \sum_i^N \sum_j^N \phi_i \cdot p_j \int_{\Omega} H(x) \cdot T_i' T_j' d\Omega \tag{13}$$

$$\sum_i^N \sum_j^N \partial_t \phi_i \cdot p_j \int_{\Omega} T_i T_j d\Omega = -g \sum_i^N \sum_j^N \eta_i \cdot p_j \int_{\Omega} T_i T_j d\Omega - 1/2 \sum_i^N \sum_j^N \phi_i \cdot p_j \int_{\Omega} \partial_x \phi(x) T_i' T_j' d\Omega \tag{14}$$

$$\sum_i^N \sum_j^N \psi_i \cdot p_j \int_{\Omega} \alpha(x) \cdot T_i' T_j' d\Omega + \sum_i^N \sum_j^N \psi_i \cdot p_j \int_{\Omega} \gamma(x) \cdot T_i T_j d\Omega = - \sum_i^N \sum_j^N \phi_i \cdot p_j \int_{\Omega} \beta(x) \cdot T_i' T_j' d\Omega \tag{15}$$

dimana $T'(x)$ menyatakan turunan $T(x)$ terhadap x . Dikarenakan fungsi tes $p(x)$ pada persamaan (13-15) adalah sembarang, maka persamaan (13-15) dapat ditulis menjadi sistem dalam bentuk matriks, yaitu sebagai berikut

$$M \partial_t \bar{\eta} = S^{(H)} \bar{\phi} + S^{(\beta)} \bar{\psi} \tag{16}$$

$$M \partial_t \bar{\phi} = -g M \bar{\eta} + V^{(2)}(\bar{\phi}) \tag{17}$$

$$[S^{(\alpha)} + M^{(\gamma)}] \bar{\psi} = -S^{(\beta)} \bar{\phi} \tag{18}$$

dimana matriks M dan $M^{(\gamma)}$ adalah *mass matrix*, $S^{(H)}, S^{(\beta)}, S^{(\alpha)}$ adalah *stiffness matrix*, yang didefinisikan sebagai berikut

$$M = (m_{ij}) = \int_{\Omega} T_i T_j dx ,$$

$$M^{(\gamma)} = (m_{ij}^{(\gamma)}) = \int_{\Omega} \gamma(x) \cdot T_i T_j dx ,$$

$$S^{(H)} = (S_{ij}^{(H)}) = \int_{\Omega} H(x) \cdot T_i' T_j' dx ,$$

$$S^{(\beta)} = (S_{ij}^{(\beta)}) = \int_{\Omega} \beta(x) \cdot T_i' T_j' dx ,$$

$$S^{(\alpha)} = (S_{ij}^{(\alpha)}) = \int_{\Omega} \alpha(x) \cdot T_i' T_j' dx$$

dan vektor $V^2(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_x \phi) T_i' T_j dx$. Perhatikan bahwa sistem persamaan matriks pada (16-18) masih dalam variabel yang bergantung terhadap waktu t . Sistem ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode *Runge-Kutta* untuk mendapatkan solusi setiap waktu.

Misalkan η_0, ϕ_0 adalah keadaan awal untuk elevasi gelombang dan potensial permukaan. Algoritma dalam menyelesaikan sistem persamaan matriks (16-18) adalah sebagai berikut.

1. Untuk sebuah kondisi awal elevasi gelombang η_0 yang diberikan, pertama-tama dihitung koefisien α, β dan γ dengan menggunakan formula (5).

2. Kemudian dari kondisi awal potensial permukaan ϕ_0 , dihitung ψ_0 dengan memecahkan sistem persamaan linear (18).
3. Dengan didapatnya ψ_0 , kemudian dihitung persamaan kontinuitas dan momentum (16-17) dengan menggunakan metode *Runge-Kutta* untuk mendapatkan keadaan pada waktu berikut.
4. Langkah 1-3 dapat diulangi sampai dengan waktu akhir simulasi yang diinginkan.

Pada bagian selanjutnya, skema numerik *Finite Element* di atas akan diuji untuk menyimulasikan propagasi gelombang soliter pada dasar rata, dan tabrakan dua soliton yang berhadapan (*head-on collision*).

IV. SIMULASI SOLITON

Propagasi gelombang soliton merupakan kasus uji standar untuk menguji akurasi dari sebuah model gelombang dan implementasi numeriknya. Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi numerik propagasi gelombang soliton pada dasar rata. Solusi analitik soliton yang digunakan untuk menguji akurasi dari hasil simulasi numerik adalah soliton dari persamaan Korteweg de-Vries atau KdV (Yuliawati dkk 2019) yang diberikan oleh formula berikut ini

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2[b(x - \lambda t)], \quad (13)$$

dimana nilai λ dan b adalah

$$\lambda = c_0 \left[1 + \frac{a}{2h} \right], \quad b = \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{3a}{h}}$$

dengan a merupakan amplitudo soliton dan λ adalah kecepatan soliton, kemudian h adalah kedalaman air.

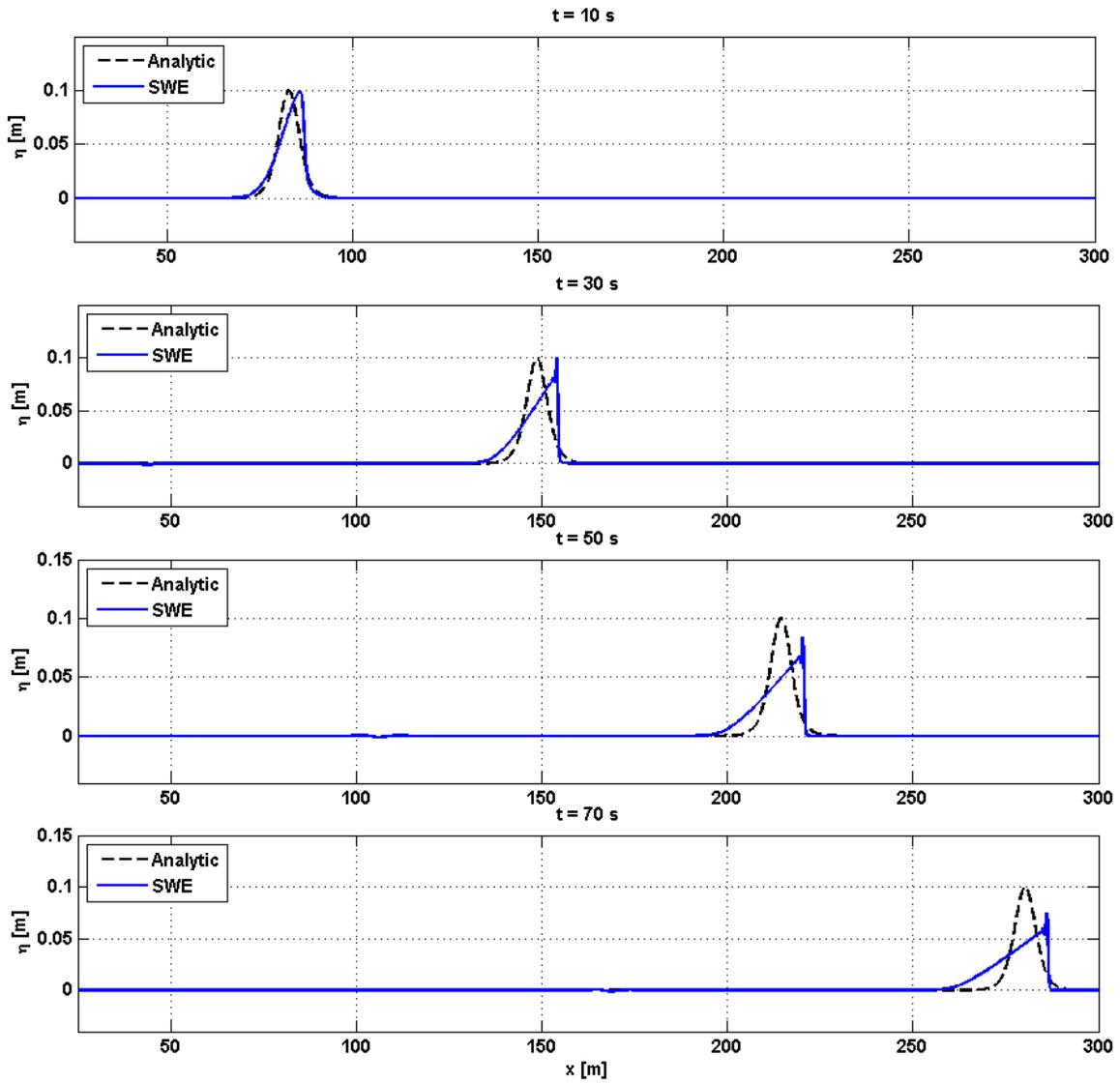
A. Propagasi Soliton

Pada kasus pertama ini, akan diuji akurasi dari model dan implementasi numerik pada model VB untuk menyimulasikan propagasi gelombang soliton pada dasar rata dan membandingkan hasilnya dengan solusi analitik yang diberikan oleh formula (13). Untuk melihat pengaruh dari efek dispersi pada model gelombang, akan dibandingkan juga hasil simulasi numerik menggunakan model nonlinear non-dispersif *Shallow Water Equations* (SWE) (6 & 7) dengan solusi analitik (13). Dikarenakan model SWE bersifat non-dispersif dan nonlinear, maka propagasi soliton hanya didominasi oleh sifat nonlinear. Sebagai akibatnya, gelombang soliton yang berpropagasi pada akhirnya akan mengalami pecah (*wave breaking*). Untuk itu, implementasi numerik model SWE akan digunakan metode *Finite Volume* dengan skema *staggered grid*, seperti yang diperkenalkan oleh (Alfikri dkk 2019, Adytia 2019, Adytia dkk 2019).

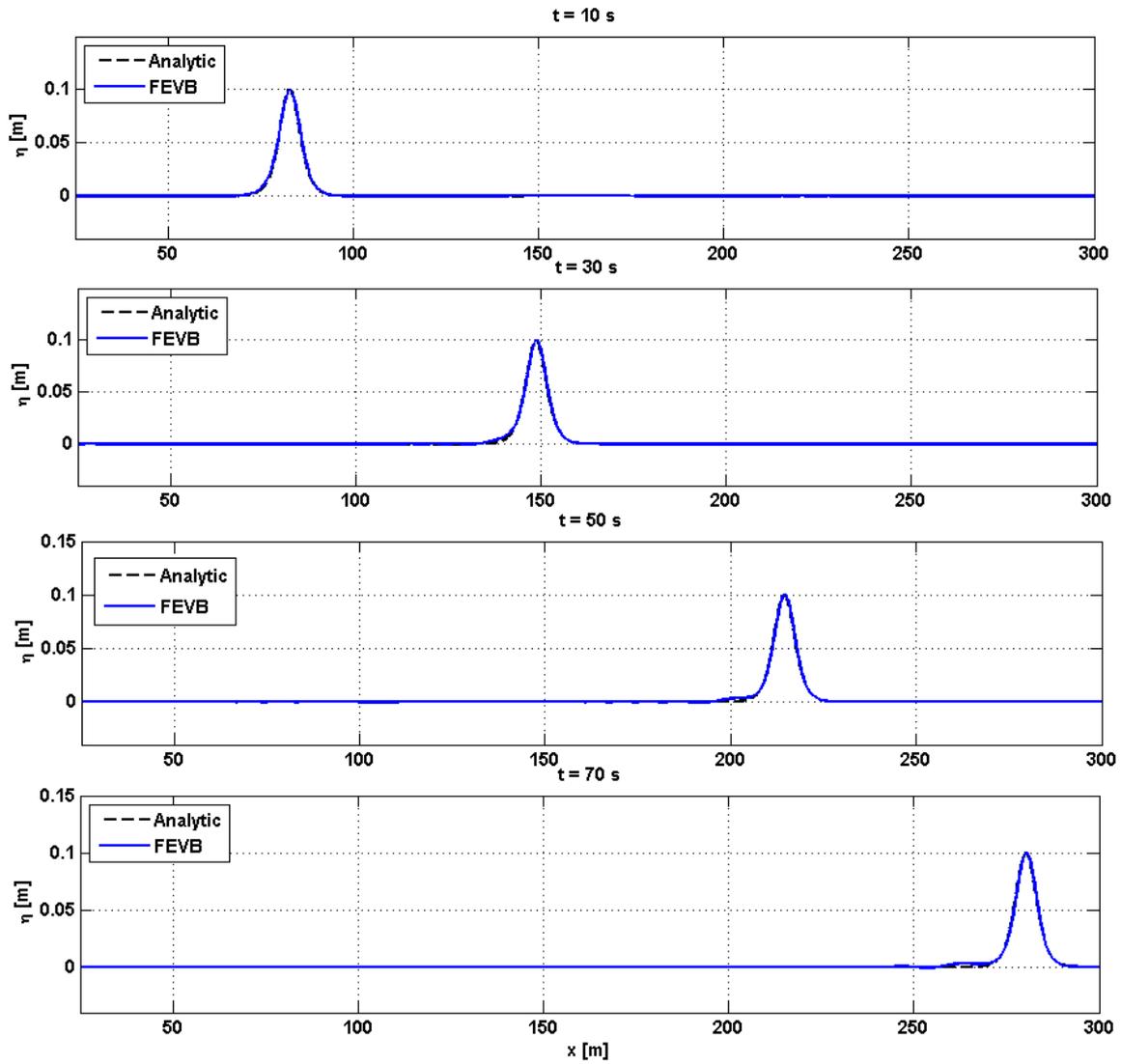
Domain komputasi yang digunakan adalah $x \in [0, 300m]$ dengan lebar grid komputasi $\Delta x = 0.5m$. Tinggi gelombang soliton yang dipilih adalah $a = 0.1m$ di atas kedalaman rata $h = 1m$, dan percepatan gravitasi yang digunakan adalah $g = 9.81m/s^2$. Pusat dari gelombang soliton berada pada $x = 50m$ dan total waktu simulasi numerik adalah $T = 70s$.

Pada Gambar 2, dibandingkan solusi analitik soliton dengan hasil simulasi numerik menggunakan model SWE yang di implementasikan dengan metode *Finite Volume* dengan skema *staggered grid* (Alfikri dkk 2019). Hasil simulasi dibandingkan pada waktu $t = 10, 30, 50$ dan $70s$. Terlihat bahwa hasil simulasi SWE berpropagasi dengan kecepatan yang sama, namun gelombang soliton menjadi sangat curam (*steep*) dan mengalami pecah atau *wave breaking*. Akibatnya tinggi gelombang dari hasil simulasi model SWE mengalami disipasi akibat dari gelombang pecah. Dilain pihak, solusi analitik soliton secara konsisten berpropagasi dengan tetap mempertahankan bentuk awalnya.

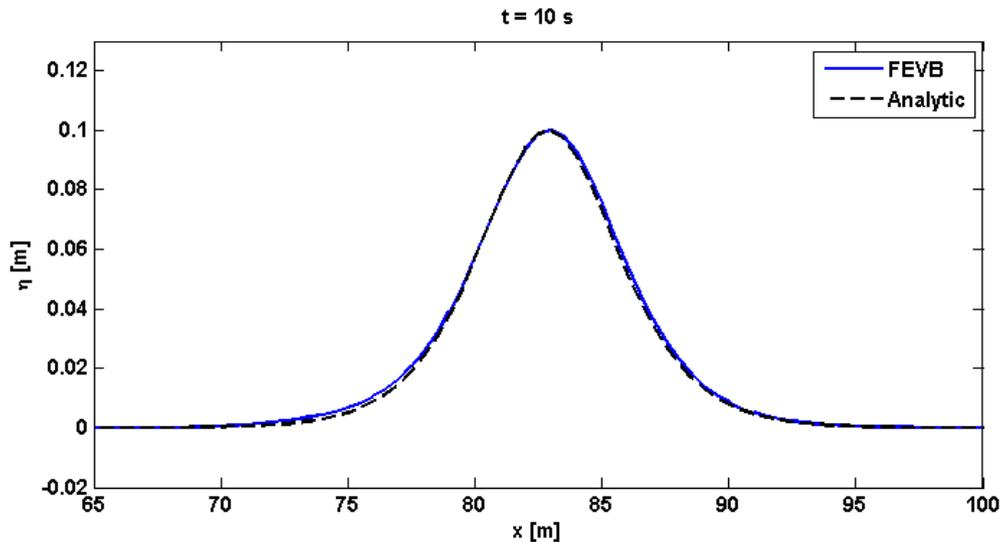
Pada Gambar 3, solusi analitik dibandingkan dengan hasil simulasi numerik dengan model VB pada waktu $t = 10, 30, 50$ dan $70s$. Terlihat dari gambar tersebut, bahwa hasil simulasi numerik VB sejalan dengan solusi analitik, baik pada saat $t = 70s$. Selain itu, tinggi gelombang soliton simulasi tidak mengalami penurunan walaupun setelah $t = 70s$ (lihat garis titik-titik merah pada Gambar 3). Pada Gambar 4, solusi numerik model VB dibandingkan dengan solusi analitik pada saat $t = 10s$. Terlihat bahwa solusi numerik cukup akurat jika dibandingkan dengan solusi analitik.



Gambar. 2. Potret propagasi gelombang soliton pada dasar rata pada saat $t = 10\text{s}, 30\text{s}, 50\text{s}$ dan 70s . Garis biru menotasikan hasil simulasi numerik dengan model SWE, sedangkan garis hitam putus-putus adalah solusi analitik.



Gambar. 3. Potret propagasi gelombang soliton pada dasar rata pada saat $t = 10\text{s}$, 30s , 50s dan 70s . Garis biru menotasikan hasil simulasi numerik model Variational Boussinesq, sedangkan garis hitam putus-putus adalah solusi numerik.



Gambar. 4. Perbandingan antara gelombang soliton hasil simulasi dengan model Variational Boussinesq (garis biru) dan solusi analitik (garis hitam putus-putus) pada $t = 10s$.

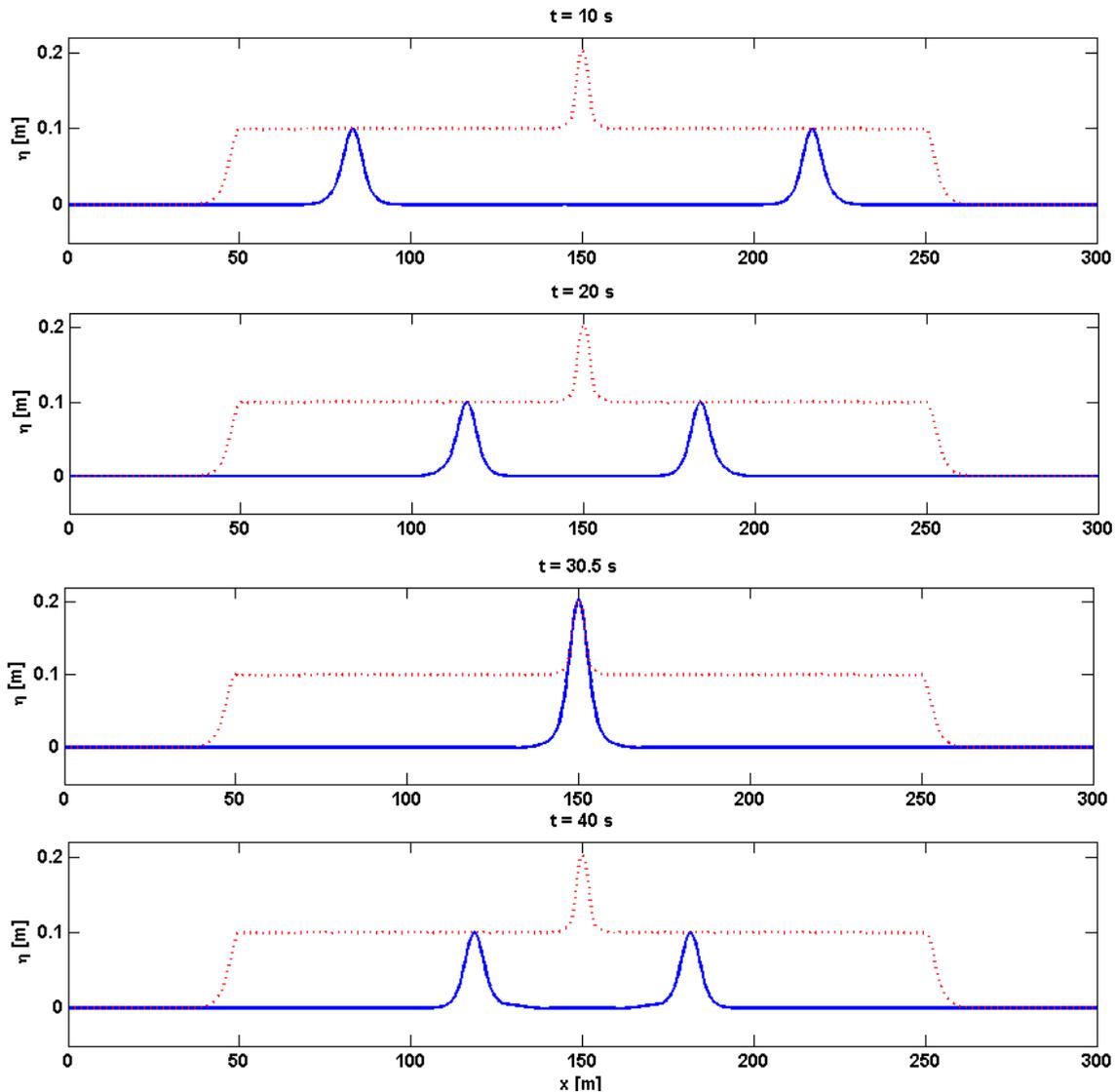
B. Tabrakan Soliton

Kasus kedua yang disimulasikan pada artikel ini adalah tabrakan dua soliton yang saling berhadapan atau *head-on soliton collision*. Kasus tabrakan dua soliton dapat dilihat sebagai refleksi dari satu soliton oleh dinding. Pada saat terjadi tabrakan soliton, terjadi interaksi antara dua gelombang nonlinear, sehingga keakuratan dari nonlinearitas dan sifat dispersi dari model gelombang dan implementasi numeriknya diuji pada saat kejadian ini. Setelah terjadinya tabrakan soliton, kedua gelombang seharusnya akan kembali menjadi dua gelombang soliton yang terpisah seperti semula.

Untuk melakukan eksperimen numerik tabrakan soliton, digunakan domain komputasi yang sama seperti pada kasus sebelumnya, yaitu $x \in [0, 300m]$ dan digunakan lebar grid komputasi $\Delta x = 0.1m$. Dua gelombang soliton yang identik ditempatkan pada $x = 50m$ untuk soliton yang bergerak ke arah kanan domain, dan pada $x = 250m$ untuk soliton yang bergerak ke arah kiri domain. Kedua gelombang mempunyai kecepatan awal yang sama, namun berbeda tanda, yang diberikan oleh formula sebagai berikut

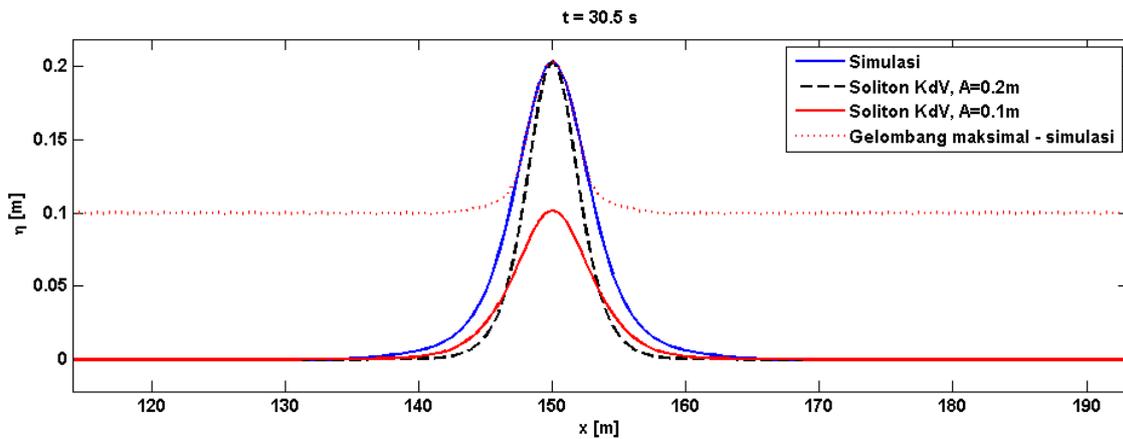
$$u(x, t) = \frac{\sqrt{gh}}{h} \eta(x, t).$$

Tinggi kedua soliton adalah $A = 0.1m$, di atas kedalaman air yang rata yaitu $h = 1m$. Percepatan gravitasi yang digunakan adalah $g = 9.81m/s^2$. Pada Gambar 5 diperlihatkan potret simulasi pada waktu yang berbeda-beda, yaitu $t = 10, 20, 30.5$ dan $40s$. Pada $t = 10s$ dan $20s$ terlihat bahwa kedua soliton bergerak saling mendekati yaitu ke titik temu pada $x = 150m$. Pada $t = 30.5s$, kedua soliton saling bertabrakan dan membentuk gelombang yang tingginya dua kali dari tinggi gelombang semula, yaitu pada posisi $x = 150m$. Setelah terjadinya tabrakan soliton, yaitu $t > 30.5s$, kedua gelombang soliton kemudian memisahkan diri dan membentuk gelombang soliton seperti sebelum terjadi tabrakan. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi nonlinear pada saat terjadi tabrakan soliton dapat disimulasikan secara akurat oleh model VB dengan implementasi *Finite Element*.



Gambar. 5. Potret simulasi tabrakan soliton dengan model Boussinesq pada saat $t = 10s, 20s, 30.5s$ dan $40s$. Garis biru menotasikan hasil simulasi, dan titik-titik merah menotasikan tinggi gelombang maksimum selama waktu simulasi.

Pada saat kedua gelombang soliton bertabrakan dan membentuk gelombang yang tingginya dua kali tinggi gelombang awal, profil gelombang pada saat tersebut dibandingkan dengan formula analitik soliton KdV dengan tinggi gelombang $A = 0.2m$ dan $A = 0.1m$, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6. Terlihat bahwa hasil dari tabrakan dua soliton membentuk gelombang yang mempunyai tinggi yang sama dengan soliton KdV dengan $A = 0.2m$, namun mempunyai panjang gelombang yang lebih lebar, bahkan lebih lebar jika dibandingkan dengan soliton KdV dengan $A = 0.1m$. Namun demikian, setelah bertabrakan, kedua soliton memisahkan diri dan membentuk soliton seperti sebelum bertabrakan.



Gambar. 6. Perbandingan antara gelombang soliton hasil simulasi dengan model Variational Boussinesq (garis biru) dan solusi analitik KdV dengan $A = 0.2m$ (garis hitam putus-putus) dan $A = 0.1m$ (garis merah) pada $t = 30.5s$.

V. KESIMPULAN

Artikel ini membahas tentang propagasi dari gelombang soliter atau soliton pada dasar rata dengan menggunakan pendekatan simulasi numerik. Berbeda dengan pendekatan banyak peneliti dibidang soliton yang menggunakan model gelombang satu arah (*unidirectional model*) seperti Korteweg de-Vries atau KdV, pada artikel ini digunakan model gelombang dua arah (*bidirectional model*) yaitu model gelombang tipe Boussinesq, dalam hal ini digunakan model Variational Boussinesq (VB). Model VB diimplementasikan secara numerik dengan menggunakan metode *Finite Element* – Galerkin. Hasil implementasi numerik dari model VB ini divalidasi dengan menggunakan solusi analitik soliton. Selain itu sebagai perbandingan, solusi analitik juga dibandingkan dengan model nonlinear non-dispersif *Shallow Water Equations* (SWE). Soliton yang dipilih mempunyai rasio tinggi gelombang dan kedalaman $a/h = 0.1$. Hasil perbandingan menunjukkan bahwa model VB memberikan akurasi yang cukup baik, sedangkan model SWE tidak dapat menyimulasikan propagasi soliton dengan baik. Model VB kemudian digunakan untuk menyimulasikan fenomena tabrakan soliton yang saling berhadapan (*head-on collision*). Pada simulasi ini terjadi interaksi nonlinear ketika tabrakan sehingga mengakibatkan gelombang tinggi dan relatif lebih panjang, namun setelah itu, soliton saling berpropagasi ke arah semula dan mempertahankan bentuk semula.

Penelitian di bidang interaksi soliton dapat dikembangkan untuk menganalisis efek pantulan nonlinear dari soliton pada dinding tanggul laut (*sea wall*), terutama ketika terjadi fenomena tsunami. Untuk itu, model gelombang dan implementasinya dapat diperluas menjadi 2 dimensi (2D).

REFERENCES

- [1] Ablowitz, Mark J., and Douglas E. Baldwin. "Nonlinear shallow ocean-wave soliton interactions on flat beaches." *Physical Review E* 86.3 (2012): 036305.
- [2] Adytia, Didit. "Momentum Conservative Scheme for Simulating Wave Runup and Underwater Landslide." *Indonesian Journal on Computing (Indo-JC)* 4.1 (2019): 29-42.
- [3] Adytia, Didit, Semeidi Husrin, and Arnida Lailatul Latifah. "Dissipation of Solitary Wave Due To Mangrove Forest: A Numerical Study by Using Non-Dispersive Wave Model." *Indonesian Journal of Marine Sciences/Illmu Kelautan* 24.1 (2019).
- [4] Alfikri, M. Z., D. Adytia, and N. Subasita. "Shock capturing staggered grid scheme for simulating dam-break flow and runup." *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1192. No. 1. IOP Publishing, 2019.
- [5] Adytia, D., Pudjaprasetya, S.R. & Tarwidi, D. "Modeling of wave run-up by using staggered grid scheme implementation in 1D Boussinesq model" *Comput Geosci* (2019).

- [6] Adytia, D., D. Tarwidi, S. A. Kifli, and S. R. Pudjaprasetya. "Staggered grid implementation of 1D Boussinesq model for simulating dispersive wave." In *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 971, no. 1, p. 012020. IOP Publishing, 2018.
- [7] Adytia, D., and E. van Groesen. "Optimized Variational 1D Boussinesq modelling of coastal waves propagating over a slope." *Coastal engineering* 64 (2012): 139-150.
- [8] Darvishi, M. T., M. Najafi, and A. M. Wazwaz. "Soliton solutions for Boussinesq-like equations with spatio-temporal dispersion." *Ocean Engineering* 130 (2017): 228-240.
- [9] El-Tantawy, S. A., N. A. El-Bedwehy, and W. M. Moslem. "Nonlinear ion-acoustic structures in dusty plasma with superthermal electrons and positrons." *Physics of Plasmas* 18.5 (2011): 052113.
- [10] Ermakov, Andrei, and Yury Stepanyants. "Soliton interaction with external forcing within the Korteweg–de Vries equation." *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 29.1 (2019): 013117.
- [11] Escalante, C., T. Morales de Luna, and M. J. Castro. "Non-hydrostatic pressure shallow flows: GPU implementation using finite volume and finite difference scheme." *Applied Mathematics and Computation* 338 (2018): 631-659.
- [12] Hassan, Hany N. "Numerical solution of a Boussinesq type equation using Fourier spectral methods." *Zeitschrift für Naturforschung A* 65.4 (2010): 305-314.
- [13] Kivshar, Yuri S., and Govind Agrawal. *Optical solitons: from fibers to photonic crystals*. Academic press, 2003.
- [14] Lawrence, C., D. Adytia, and E. Van Groesen. "Variational Boussinesq model for strongly nonlinear dispersive waves." *Wave motion* 76 (2018): 78-102.
- [15] Miles, John W. "Obliquely interacting solitary waves." *Journal of Fluid Mechanics* 79.1 (1977): 157-169.
- [16] Miles, John W. "Hamiltonian formulations for surface waves." *Applied Scientific Research* 37.1-2 (1981): 103-110.
- [17] Wang, Yue-Yue, et al. "Dynamics of nonlocal and localized spatiotemporal solitons for a partially nonlocal nonlinear Schrödinger equation." *Nonlinear Dynamics* 92.3 (2018): 1261-1269.
- [18] Yuliawati, Lia, et al. "Simulation of obliquely interacting solitary waves with a hard wall by using HAWASSI-VBM and SWASH model." *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1707. No. 1. AIP Publishing, 2016.
- [19] Yuliawati, Lia, Wono Setya Budhi, and Didit Adytia. "Numerical Studying of Soliton in the Korteweg-de Vries (KdV) Equation." *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1127. No. 1. IOP Publishing, 2019.
- [20] Zaera, Ramon, et al. "Propagation of solitons in a two-dimensional nonlinear square lattice." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 106 (2018): 188-204.